

文章编号 1004-924X(2009)03-0626-07

融合局部和全局结构的流形学习

黄 鸿¹, 李见为^{1,2}, 冯海亮¹

(1. 重庆大学 光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400030;

2. 重庆工学院 教授流动站, 重庆 400050)

摘要:提出了一种融合局部与全局结构的保持嵌入(LGPE)算法。该方法首先假定目标空间的整体映射函数,然后结合数据的全局几何结构分布信息进行数据重构,最后通过最小化准则函数来得到嵌入高维空间的低维子流形。LGPE方法在保持数据局部结构的同时保留了全局结构信息,在信噪比为 10 dB 的稀疏 Swiss-roll($N=400$)和 COIL-20 多姿态数据集上都取得了较好的维数约简效果。与其他局部流形学习方法相比,该方法在 AT&T 人脸图像库中,当嵌入特征矢量维数 $d < 40$ 时,其识别率提高了约 15%。在人工与真实数据库的实验结果表明,本文方法对噪声和稀疏数据具有较好的鲁棒性。

关键词:维数约简;流形学习;全局几何结构;局部全局保持嵌入

中图分类号:TP391.4 **文献标识码:**A

Fusion of local and globe structures for manifold learning

HUANG Hong¹, LI Jian-wei^{1,2}, FENG Hai-liang¹

(1. *Key Laboratory of Opto-electronic Technique of the Ministry of Education,*

Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. Professor Mobile Station, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, China)

Abstract: A new method called Local and Global Preserving Embedding (LGPE) is proposed for manifold learning. This method assumes a global embedding function in low dimensional space, then incorporates the relative compactness information of the data distributions on the global geometry to reconstruct sample data. Finally, the global low dimensional submanifold is obtained by minimizing the cost function. The LGPE preserves the local and global structures of the data points simultaneously, and can obtain better dimensionality reduction on the sparse Swiss-roll dataset with noises ($N=400$, SNR = 10 dB) and COIL-20 multi-poses dataset. When it is used in the AT&T face dataset, the recognition rate can be improved by 15% as compared with that of other local manifold methods under condition of embedding dimension lower than 40. The experimental results on both synthetic and real data sets show that proposed method is effectiveness and robustness for noise and sparse data.

Key words: dimensionality reduction; manifold learning; global geometric structure; Local and Global Preserving Embedding (LGPE)

1 引 言

随着信息时代的到来,科研工作者在研究过程中不可避免地需要对高维数据进行分析,如全球气候模式、恒星光谱、人的基因分布、受光照影响的多姿态表情人脸图像序列等。因此,如何从这些高维数据中找出事物的本质规律成为需要迫切解决的问题^[1]。

维数约简是指将样本从高维观测空间通过线性或非线性映射投影到一个低维特征空间,从而找出隐藏在观测数据中有意义的低维结构,其主要目标是在获得最优、最显著特征的同时丢弃无关或次要的信息,降低数据的维数以减低分类系统的复杂性^[2-3]。维数约简可以分为线性和非线性两类,线性方法主要有主成分分析(PCA)、Fisher 判别分析(FDA)等,他们对非线性结构的数据无能为力。随着核方法的成功应用,以后出现了 KPCA(Kernel PCA)、KLDA(Kernel LDA)等方法^[4]。近年来,又有科学家提出高维观测数据很可能位于一个低维的非线性子流形上,流形学习方法可以将高维观测数据映射到低维子流形,既能够降低数据维数,减少运算量,同时又能很好地保留样本的拓扑结构。具有代表性的流形学习方法有等距映射(Isometric Feature Mapping, ISOMAP)^[5]、局部线性嵌入(Local Linear Embedding, LLE)^[6]、拉普拉斯本征映射(Laplacian Eigenmaps, LE)^[7]和局部切空间排列算法(LTSA)^[8]等。上述方法都是批处理模式,不能直接得到新样本的低维嵌入坐标,因而限制了他们的应用。He 等提出的局部保持映射(Locality Preserving Projection, LPP)^[9]方法,可以有效解决新样本问题,并成功地应用于人脸识别。但 LPP 与 LLE 等方法都与基于保持数据间的局部结构的方法相同,并没有充分利用全局结构信息,存在对噪声敏感和要求样本稠密等缺点,而在实际的应用中,并不能保证获取到的数据总是足够稠密和无噪声的,因此,此类方法不能在高维稀疏或噪声数据中得到理想的嵌入效果^[10-11]。Xue 等提出了鲁棒局部嵌入的方法(Alternative Robust Local Embedding, ARLE)^[12],对噪声具有较好的鲁棒性,但是没有直接的映射函数,依然不能解决新样本的问题。

本文提出一种新的流形学习方法—局部保持嵌入(Local and Global Preserving Embedding, LGPE),它建立在 LLE 和 LPP 方法的基础上。LGPE 方法将数据局部近邻样本信息和全局结构的分布信息结合进行数据重构,然后最小化准则函数来得到嵌入于高维空间的低维子流形。该方法在保持数据局部结构的同时保留全局结构信息,因而对噪声和稀疏数据具有较好的鲁棒性。在不同数据集上的实验结果证明了该方法可以有效地发现嵌入高维数据空间的低维子流形。

2 算法介绍

2.1 局部线性嵌入(LLE)

LLE^[6]算法针对在高维欧氏空间中的高维数据集 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, 将这些样本映射到一个低维空间 $\mathbf{R}^d (d \ll D)$ 中, 得到 \mathbf{X} 的低维嵌入为 $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N\}$ 。LLE 的主要思想是认为流形上每一个局部邻域内的任意一点都可以描述为邻域内其他点的线性组合。通过最小化这种线性表示的误差, 可建立如下模型:

$$J_{\text{LLE}} = \arg \min \sum_{i=1}^n \left\| \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^k \omega_{ij} \mathbf{y}_j \right\|^2, \quad (1)$$

约束条件为: $\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i = 0, \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{I}$ 。利用 Lagrange 乘子法, 该模型可以转化为方程:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}, \quad (2)$$

的特征值求解问题, 式中 $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \mathbf{W})$ 。

2.2 局部保持投影(LPP)

LPP^[9]算法本质上是一种线性维数约简方法, 它继承了 LE 算法的思想, 即基于最近邻图来建立映射, 因而具有一般线性维数约简算法所不具备的流形学习能力。LPP 方法针对高维欧氏空间 \mathbf{R}^D 中的高维数据集 \mathbf{X} , 寻求一个投影矩阵 \mathbf{A} , 并将这些样本映射到一个低维特征空间 $\mathbf{R}^d (d \ll D)$ 中, 得到 \mathbf{X} 的低维嵌入为 \mathbf{Y} , 且 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{X}$, 其中 \mathbf{A} 可以通过求解下式中的最小化问题来得到。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{A}} \left[\sum_{ij} \left\| \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j \right\|^2 \mathbf{W}_{ij} \right] = \\ \arg \min_{\mathbf{A}} \left[\sum_{ij} \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{x}_i - \mathbf{A}^T \mathbf{x}_j \right\|^2 \mathbf{W}_{ij} \right] = \\ \arg \min_{\mathbf{A}} \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{L} \mathbf{X}^T \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (3)$$

约束条件为: $\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^T \mathbf{A} = 1$ 。式中 \mathbf{W} 为相似矩阵, \mathbf{D} 为对角阵, $D_{ii} = \sum_j \mathbf{W}_{ij}$, $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ 为拉普拉斯矩阵, 具有对称和半正定的性质。 D_{ii} 表明点

的重要程度。式(3)可以通过简化成下式中的泛化的特征值求解问题

$$\mathbf{X}\mathbf{L}\mathbf{X}^T\mathbf{A}=\lambda\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^T\mathbf{A}. \quad (4)$$

假定 $\mathbf{A}=\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-1}\}$ 为对应特征值 $\lambda=\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}\}$ 的特征向量, 则 LPP 的低维线性嵌入映射为 $\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}$ 。

2.3 局部与全局保持嵌入(LGPE)

LGPE 方法基于 LLE 中的线性重构思想, 其目标是通过在样本数据的局部近邻重建中引入数据的全局分布信息来同时保持样本数据间的局部和全局之间的拓扑结构, 由此获得低维嵌入, 不仅能发现隐藏于高维数据空间中的低维子流形, 而且对有噪声、样本稀疏等情形的数据具有较好的鲁棒性。

假定数据集 $\mathbf{X}=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ 含有 N 个样本点, $\mathbf{x}_i\in\mathbf{R}^D$, 样本数据来自本征维数为 $d(d\ll D)$ 的低维子流形, LGPE 方法希望通过投影 $\mathbf{Y}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}$, 在保持局部近邻结构的同时, 保持数据的全局结构。因此, 定义 LGPE 的准则函数为

$$J(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^N\mathbf{W}_i^g\left\|\mathbf{y}_i-\sum_{j=1}^k\mathbf{w}_{ij}^l\mathbf{y}_j\right\|^2=\sum_{i=1}^N\mathbf{W}_i^g\left\|\mathbf{A}^T\mathbf{x}_i-\sum_{j=1}^k\mathbf{w}_{ij}^l\mathbf{A}^T\mathbf{x}_j\right\|^2=\sum_{i=1}^N\mathbf{W}_i^g\left\|\mathbf{A}^T\mathbf{x}\mathbf{I}_i-\mathbf{A}^T\mathbf{x}\mathbf{W}^l\right\|^2. \quad (5)$$

约束条件为: $\mathbf{A}^T\mathbf{X}\mathbf{W}^g\mathbf{X}^T\mathbf{A}=1$ 。式中 k 为近邻数, $\mathbf{W}_{ij}^l=W_{ij}/D_{ii}$, $\mathbf{W}_i^g=\text{diag}(D_{11}/D, D_{22}/D, \dots, D_{NN}/D)$, 其中 W_{ij} 是 \mathbf{x}_i 与近邻点 \mathbf{x}_j 之间的相似性权值, 且要满足: $\sum W_{ij}=1$, W_{ij} 可以通过下式进行计算:

$$\mathbf{W}_{ij}=\begin{cases} \exp(-\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\|^2/t) & \text{if } \mathbf{x}_i\in km(j) \text{ or } \mathbf{x}_j\in km(i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (6)$$

式中, $kmn(i)$ 表示为 \mathbf{x}_i 的 k 个近邻点。 $D_{ii}=\sum_{j=1}^k W_{ij}$, $D=\sum_{i=1}^n D_{ii}$, \mathbf{I} 为单位阵。从 \mathbf{W}^g 的定义可得知, 对应于 \mathbf{x}_i 的 \mathbf{W}_i^g 值越大, 则它在全局流形结构的近邻分布越紧致, 即表明 \mathbf{x}_i 与其近邻点越相似, 进行局部重构的效果越好。反之, 如果相对于其他点的全局权重值偏小, 则表明 \mathbf{x}_i 为噪声点。同时, \mathbf{W}_i^g 具有 \mathbf{x}_i 的近邻点的全局分布信息。由此可得知, 将 \mathbf{W}_i^g 应用于准则函数, 可以在一定程度上保持全局结构信息, 对噪声和稀疏数据具

有鲁棒性。投影矩阵 \mathbf{A} 可以通过最小化准则函数求得, 即

$$J_{\min}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^N\mathbf{W}_i^g\left\|\mathbf{A}^T\mathbf{x}\mathbf{I}_i-\mathbf{A}^T\mathbf{x}\mathbf{W}^l\right\|^2=\text{tr}\{\mathbf{A}^T\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{W}^l)\mathbf{W}^g(\mathbf{I}-\mathbf{W}^l)^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\}=\text{tr}\{\mathbf{A}^T\mathbf{X}\mathbf{L}\mathbf{X}^T\mathbf{A}\}, \quad (7)$$

式中, tr 表示矩阵的迹, $\mathbf{L}=(\mathbf{I}-\mathbf{W}^l)\mathbf{W}^g(\mathbf{I}-\mathbf{W}^l)^T$ 是对称的半正定稀疏矩阵。因此准则函数和约束条件可以表示为:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & J(\mathbf{A})=\text{tr}\{\mathbf{A}^T\mathbf{X}\mathbf{L}\mathbf{X}^T\mathbf{A}\} \\ \text{subject to } & \mathbf{A}^T\mathbf{X}\mathbf{W}^g\mathbf{X}^T\mathbf{A}=1 \end{aligned}. \quad (8)$$

通过简单的代数运算, 上述最优化问题可以很容易地转换成下面的特征值求解问题, 即:

$$\mathbf{X}\mathbf{L}\mathbf{X}^T\mathbf{A}=\lambda\mathbf{X}\mathbf{W}^g\mathbf{X}^T\mathbf{A}. \quad (9)$$

综上所述, 可以归纳 LGPE 算法步骤如下:

Step1: 计算每个样本点 \mathbf{x}_i 的 k 个近邻点。把相对于所求样本点距离最近的 k 个样本点规定为所求样本点的 k 个近邻点。 k 是一个预先给定值。

Step2: 依据选定的相似性测度, 即式(6)计算权重 W_{ij} , 通过 W_{ij} 构造全局权重 \mathbf{W}^g 与局部重建权重 \mathbf{W}^l 。

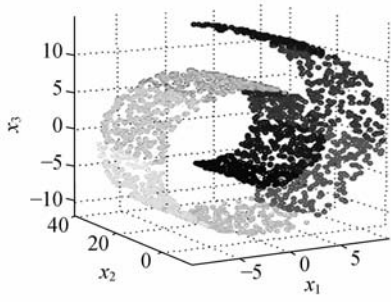
Step3: 通过稀疏矩阵 \mathbf{L} 、 \mathbf{W}^g 来求解式(9)的特征向量与特征值, 假定 $\mathbf{A}=\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-1}\}$ 为对应特征值 $\lambda=\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}\}$ 的特征向量, 则 LGPE 的低维线性嵌入映射为 $\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}$ 。

3 实验结果及分析

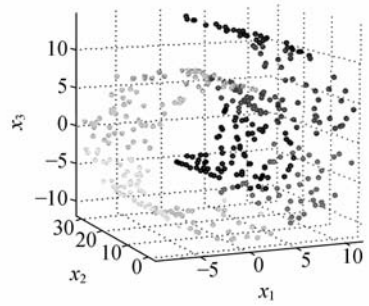
为了验证本文提出的 LGPE 算法对高维数据的维数约简效果, 分别对在 Swiss-roll 曲面上随机生成的样本数据集、COIL-20(Columbia Object Image Library)数据库以及 AT&T 人脸数据库进行实验, 并把实验结果与 LLE 算法、LPP 算法的实验结果进行比较, 实验中近邻参数 $k=12$ 。

3.1 人工数据集(Swiss-roll)

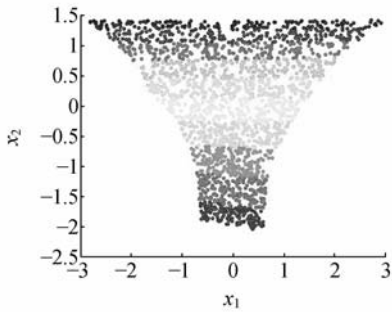
Swiss-roll 数据集是从 3 维欧氏空间中 Swiss-roll 曲面上随机采样得到的, 并用相同颜色的点标识近邻, 从而可以通过在目标空间内同颜色点的聚合程度反映嵌入映射算法的有效程度。实验中分别采用 LLE、LPP 和 LGPE 算法, 将高维数据($D=3$)投影到低维空间($d=2$)。图 1 和图 2 分别给出了在不同样本点(N)和噪声条件下的各种算法的 2 维映射结果。



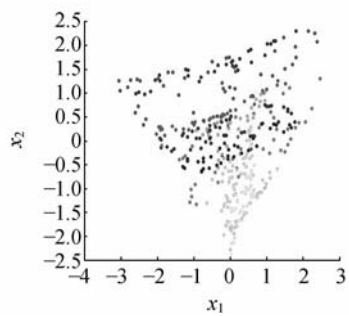
(a)Swiss 卷(N=2 000)
(a)Swiss-roll(N=2 000)



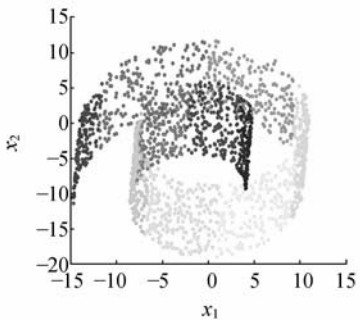
(a)Swiss 卷(N=400)
(a)Swiss-roll(N=400)



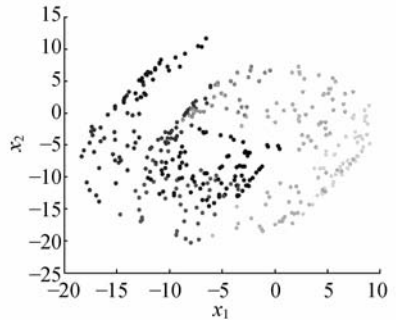
(b)LLE 嵌入结果
(b)Result of LLE



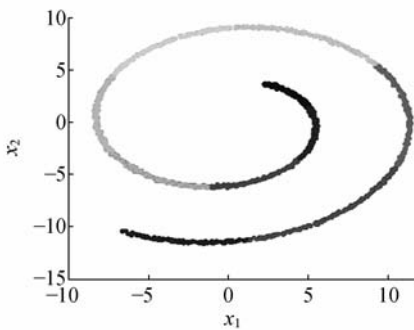
(b)LEE 嵌入结果
(b)Result of LEE



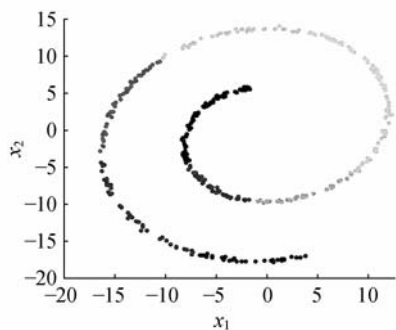
(c)LPP 嵌入结果
(c)Result of LPP



(c)LPP 嵌入结果
(c)Result of LPP



(d)LGPE 嵌入结果
(d)Result of LGPE



(d)LGPE 嵌入结果
(d)Result of LGPE

图 1 不同算法对无噪声的 Swiss-roll 数据集进行维数约简后的 2 维映射图

Fig. 1 LLE, LPP and LGPE performed in Swiss-roll without noises

图 2 不同算法对含噪声稀疏的 Swiss-roll 数据集进行维数约简后的 2 维映射图

Fig. 2 LLE, LPP and LGPE performed in Swiss-roll with noises

从以上实验可以看出,当样本数据较多且无噪声(图 1, $N=2\ 000$)时,LLE 算法和 LGPE 算法均能得到较为理想的结果,但 LPP 算法的效果不是很理想。但当样本点逐渐减少为稀疏数据,同时加入信噪比为 10 dB 的噪声时(图 2, $N=400$),LLE 与 LPP 算法已经失效,不同颜色的点出现了不同程度的混叠,而 LGPE 算法却仍可以将源数据空间中同一颜色的点映射到目标空间的同一块区域,保持 Swiss roll 曲面的局部相邻性质,得到近似 Swiss roll 型的低维嵌入坐标。通过实验可以看出,在源数据稀疏且有噪声的情况下,LGPE 方法仍能得到相对理想的结果。由此可知,LGPE 算法能较好地解决源数据稀疏和有噪声情况下的维数约简问题。

3.2 COIL-20 数据集

COIL-20 数据库中共有 20 个对象,对每一个对象从 $0^\circ\sim 360^\circ$ 进行水平方向的旋转,每隔 5° 采样一幅图像,这样每一对象共有 72 幅图像。整个数据库共有 1 440 幅图像,图像分辨率为 64×64 。COIL-20 数据库中的多姿态图像是一种典型的流形结构,可以看成是对象旋转形成的非线性流形上的观测数据。流形学习的主要目标是发现嵌入于高维数据中有意义的低维结构,因此多姿态图像的可视化可以对 LGPE 算法的可行性进行验证。本次采用第 1 个对象的 72 幅图像,为了减少计算量,对其进行 $1/4$ 下采样,以达到 32×32 的分辨率,向量化图像以后,数据的维数 $D=1\ 032$,对其采用 LGPE 方法进行 2 维可视化表示。图 3 为对象的部分样本实例,图 4 是采用 LGPE 进行维数约简后的 2 维可视化投影。

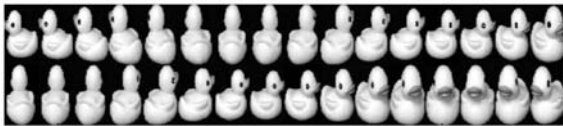


图 3 多姿态对象图像示例

Fig. 3 Examples of multi-pose object image

从图 4 可以得知,尽管在 1 024 维的高维空间中,使用稀疏样本很难描述数据分布,但从图像 2 维可视化表示可以发现沿着闭合曲线图像的姿态依次变化,这表明 1 024 维的高维多姿态图像数据经 LGPE 算法学习后得到了其内在自由度(对象旋转),利用此自由度可以有效地发现数据

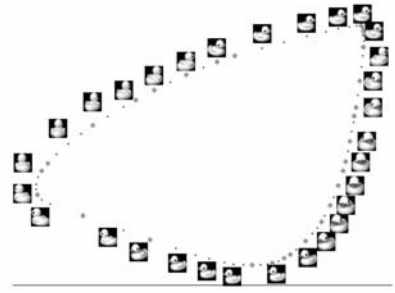


图 4 多姿态对象图像通过 LGPE 算法学习后的 2 维可视化表示

Fig. 4 Two-dimensional visualizing presentation for multi-pose object images of COIL-20 dataset studied by LGPE algorithm

之间的内在有序关系,这就证明了 LGPE 算法的可行性。

3.3 AT&T 人脸图像库

本文在 AT&T 人脸数据库对 LGPE 算法与 Eigenfaces(PCA)、LLE 算法、LPP 算法进行识别性能比较。AT&T 人脸库包含 40 个人,每人 10 幅图像,分辨率为 92×112 ,灰度级为 256,这些图像变化主要在于面部轮廓及表情、遮掩(如眼镜和胡须等)以及姿态和光照等。在预处理阶段,将 AT&T 脸库中所有图片进行 $1/16$ 下采样,以达到 23×28 的分辨率,最后将数据库中预处理后的每张图像都进行均值为 0、方差为 1 的规格化^[13]。图 5 给出了 AT&T 人脸库的图像示例。



图 5 AT&T 库中的人脸图像示例

Fig. 5 Sample face images of AT&T database

在实验中,直接对预处理后的人脸图像进行维数约简,然后使用最近邻分类器对维数约简后的特征矢量进行分类。为了尽可能地减少分类器对算法的影响,对每个算法进行了 10 次实验,取其平均值。在 AT&T 人脸库中每人随机选取 5 张人脸图像为训练集,其余的 5 张图像为测试集。各种算法在 AT&T 人脸库中不同嵌入维数下的识别结果如图 6 所示。

从图 6 的总体识别结果来看,由于都是非监

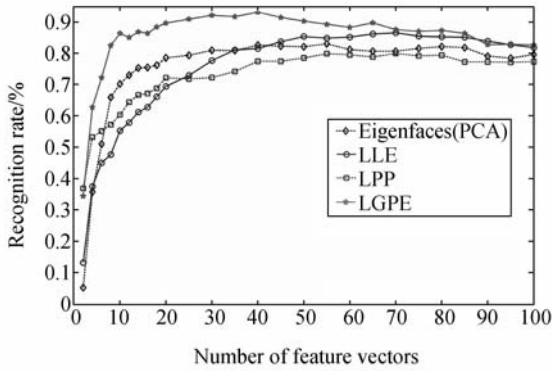


图6 不同算法在 AT&T 库上识别率与特征矢量维数关系图

Fig. 6 Relation of recognition rate and characteristic vector dimension with different methods on AT&T database

督的方法,各种算法的识别曲线都比较相似,随着嵌入的特征矢量维数的增加,识别率也会逐步上升。LLE 和 LPP 方法都是试图保留样本局部流形结构不变,并没有考虑人脸图像间的全局信息,又由于对稀疏且可能含有噪声的高维数据不具有鲁棒性,所以识别率的上升会有明显的极限,识别效果不是非常理想。而 LGPE 方法既能较好地保持人脸图像间的局部流形结构,又兼顾了全局结构信息,取得了较为理想的识别效果。

从维数约简的目的来看,在图 6 中相对其他算法,基于 LGPE 的方法达到较高识别率所需要的特征矢量的维数要明显少于其他方法,这也更符合维数约简的目标。

为了检验各种方法的实时性,本文对各种算法的运算时间进行了实验对比,使用的计算机配置为: Intel 赛扬 1.7 G 的 CPU, 512 M 的 DDR 内存。嵌入特征维数 $d=10$, 其他参数设置不变,实验结果取每种方法实验 10 次的平均值。各种算

法的运行时间如表 1 所示。

表 1 各种算法的运行时间比较(单位:s)

Tab. 1 Runtime comparison of different methods (Unit: s)

算法	PCA	LLE	LPP	LGPE
运行时间	1.452 1	1.761 1	1.862 7	3.357 1

从表 1 可得知,由于 LGPE 算法需要对局部与全局权重进行构造,计算量有所增加,但都在一个数量级上,且相差甚微,相对于识别率提高约 15% 而言,此计算代价是可以接受的。

4 结 论

本文通过对 LLE、LPP 等流形学习算法的分析,针对基于局部流形结构保持的流形学习方法对噪声和样本的稀疏性敏感的缺点,提出了一种新的局部保持嵌入(LGPE)算法。它建立在 LLE 和 LPP 方法的基础上,通过将数据局部近邻样本信息和全局结构的分布信息结合来进行数据重构,然后最小化准则函数来得到映射矩阵。LGPE 方法在保持数据局部结构的同时保留全局结构信息,对稀疏和噪声数据有较好的鲁棒性。在信噪比为 10 dB 的 400 点采样的稀疏 Swiss-roll 和 COIL-20 多姿态数据集上进行了实验并取得了较好的维数约简效果。在 AT&T 人脸图像库嵌入特征矢量维数 $d < 40$ 时,相对其他局部流形学习方法,该算法的识别率提高了约 15%。实验结果表明, LGPE 方法不仅可以发现嵌入在高维数据中有意义的低维结构,而且可以提高人脸识别系统的分类效果。因 LGPE 算法为非监督的流形学习算法,未能利用样本的类别信息,如何将其向监督或半监督学习进行扩展以及采用简化算法减少计算量等有待进一步深入研究。

参考文献:

- [1] 尹峻松,肖健,周宗潭,等. 非线性流形学习方法的分析与应用[J]. 自然科学展, 2007, 17(8): 1015-1025.
YIN J S, XIAO J, ZHOU Z T, et al.. Analysis and application of non-linear manifold learning method [J]. *Progress in Natural Science*, 2007, 17(8): 1015-1025. (in Chinese)

- [2] 赵连伟, 罗四维, 赵艳敏, 等. 高维数据流形的低维嵌入及嵌入维数研究[J]. 软件学报, 2005, 16(8): 1423-1430.
ZHAO L W, LUO S W, ZHAO Y CH, et al.. Study on the low-dimensional embedding and the embedding dimensionality of manifold of high-dimensional data [J]. *Journal of Software*, 2005, 16(8): 1423-1430. (in Chinese)
- [3] 李粉兰, 徐可欣. 一种应用于人脸正面图像的眼睛

- 自动定位算法[J]. 光学 精密工程, 2006, 14(2): 320-326.
- LI F L, XU K X. An algorithm applied in frontal-view face images for automatically localizing eyes [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(2): 320-326. (in Chinese)
- [4] 李粉兰, 唐文彦, 段海峰, 等. 分数次幂多项式核函数在核直接判别式分析中的应用[J]. 光学 精密工程, 2007, 15(9): 1410-1414.
- LI F L, TANG W Y, DUAN H F, *et al.*. Application of fractional power polynomial kernel function to kernel direct discriminant analysis [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(9): 1410-1414. (in Chinese)
- [5] TENENBAUM J B, SILVA V D, LANGFORD J C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction [J]. *Science*, 2000, 290(5500): 2319-2323.
- [6] ROWEIS S T, SAUL L K. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding [J]. *Science*, 2000, 290(5500): 2323-2326.
- [7] BELKIN M, NIYOOGI P. Laplacian eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering [C]. *In Advances in Neural Information Processing Systems, Cambridge, MA, USA*, 2002(14): 585-591.
- [8] ZHANG Z Y, ZHA H Y. Principal manifolds and nonlinear dimensionality reduction via local tangent space alignment [J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2004, 26(1): 313-338.
- [9] HE X F, NIYOOGI P. Locality preserving projections [C]. *In Proceedings of Neural Information Processing System, Vancouver, Canada*, 2003: 153-160.
- [10] 曾宪华, 罗四维. 动态增殖流形学习算法[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(9): 1462-1468.
- ZENG X H, LUO S W. A dynamically incremental manifold learning algorithm [J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2007, 44(9): 1462-1468. (in Chinese)
- [11] 曹顺茂, 叶世伟. 一种在源数据稀疏情况下的流形学习算法研究[J]. 计算机仿真, 2007, 24(3): 104-106.
- CAO SH M, YE SH W. A manifold learning algorithm in a state of sparse source data [J]. *Computer Simulation*, 2007, 24(3): 104-106. (in Chinese)
- [12] XUE H, CHEN S C. Alternative robust local embedding [C]. *In Proceedings of International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, Beijing, China*, 2007: 591-596.
- [13] 梁毅雄, 龚卫国, 潘英俊, 等. 基于奇异值分解的人脸识别方法[J]. 光学 精密工程, 2004, 12(5): 543-549.
- LIANG Y X, GONG W G, PANG Y J, *et al.*. Singular value decomposition-based approach for face recognition [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2004, 12(5): 543-549. (in Chinese)

作者简介:



黄 鸿(1980—),男,博士研究生,主要从事流形学习、模式识别、生物特征识别等方面的研究。E-mail: hhuang.cqu@gmail.com



冯海亮(1962—),男,副教授,主要从事应用数学、流形学习、人脸识别等方面的研究。E-mail: fhliang@cqu.edu.cn

导师简介:



李见为(1947—),男,教授,博士生导师,主要从事图像处理、模式识别、地理信息系统等方面的研究。E-mail: jwli@cqu.edu.cn